"副実像"の写像公式化の研究 ~定式化のための行列の特定と可視化~

熊本県立宇土高等学校(科学部物理班) 高校2年 成松 紀佳(代表)、小佐井 彩花、高田 晶帆 指導教諭 梶尾 滝宏

「継続研究」

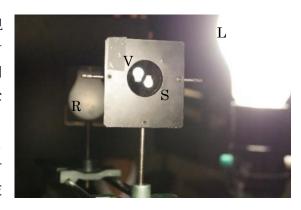
実験期間:平成28年4月~平成29年9月

データ収集期間:昆虫の捕獲 平成28年7月~10月、平成29年7月~8月

"副実像"の写像公式化の研究 ~定式化のための行列の特定と可視化~

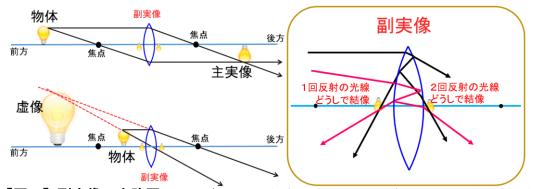
1 研究目的

先輩が、焦点距離の測定中に、レンズ付近に出現する小さな2つの実像を発見し、"副実像"と名付けた【図1】。副実像の出現については、光学の専門書[2]に記載が無いだけでなく、レンズメーカーなど専門家ですら確認できておらず、これまで長年、見落とされていたことがわかった。その背景として、副実像の光量は非常に弱く、カメラの普及に合わせて、レンズの反射防止膜や余分な光を防ぐ構造の技術が向上し、虚像や迷光といわれる一般的なレンズゴーストとともに副実像はカットされていたことが挙げられる。先輩らは、光学実験台を用いて本来の実像(主実像とよぶ.)の位置から焦点距離



【図1】レンズ付近に出現する"副実像" L:光源, R:本来の実像, V:虚像, S:副実像 後方の副実像はR側から観察できる。

を求める実験を暗室下で行っていた際、光源の前に矢印板を設置せずに測定してしまい、その際に、 従来の実像とは別の、凸レンズ付近に出現する小さな2つの倒立像を発見した。すりガラスに写っ たことから実像であると確認した (2011年)。



【図2】副実像の光路図 レンズ内反射で結像するため、副実像は焦点の内側でも存在する。

発見当時は、どのように結像しているかが不明であったが、特注の片面コーティングレンズを用いて、レンズ前方の副実像は1回の内部反射、後方は2回の内部反射によって結像していることを突き止め、結像の仕組みを光路図【図2】で説明することに成功した(2012年)。また、副実像はレンズゴーストの中でも魚眼効果を利用した特別なゴーストとして、出現している可能性が高いことがわかり、測定実験によって副実像の出現位置と出現範囲を特定し、レンズ内反射の結像により撮影範囲外からも映り込むこと等を突き止めた(2014年)。最近では、心霊写真を再現したり、光軸近似行列計算という方法を用い、副実像の定式化を一部(凸レンズのみ)成功させている(2015年)。しかし、副実像が確認できている平凸レンズやレンズ眼を持つ昆虫の単眼については、詳しくは調べてはいない。

そこで我々は、昆虫の眼という微視的世界に出現する副実像に大変興味を持ち、単眼及び、平凸 レンズに出現するしくみを調べた。2年間取り組んだ研究の詳細を報告する。

年度	副実像の 発見	結像の 作図	特別な ゴースト	両凸レンズ		平凸レンズ		昆虫		R1R2		複数
				厚肉 モデル	薄肉 モデル	厚肉 モデル	薄肉 モデル	昆虫 の単眼	副焦点	凸レンズ	可視化	複数 レンズ
2011	•											
2012		•										
2013			•	×	Δ							
2014				0	0							
2015			•	_	_	×	Δ	A				
2016				©	0	©	©		•			
2017										0	•	•

×:未着手

▲: 着手

🛆 : 出現位置と焦点距離 〇:定式化

: 継続中

○:2通りの計算方法から結果が一致することを確認

: 完成

【図3】副実像の研究の経緯

2 研究方法

(1)システム行列[3,4]を用いた光軸近似による光線追跡という手法で定式化を行っているが、 これらは一般的なレンズの写像公式にも用いられている。しかし、副実像は反射によって結像する ため、球面反射というシステム行列【図4】を独自に組み込んで用いている (αパターン)。 凸レ ンズにおいては既に定式化できており、ここでは、αパターンを用いてシステム行列の組み合わせ 方を調べ、平凸レンズにおける副実像の出現位置の定式の導出を行う。さらに、別のシステム行列 (βパターン)を調べ、検証方法も確立する。

平凸レンズは、面の向きによっても副実像の出現位置は異なるため、それぞれの向きでレンズ前後 に出現する4つの式を導出する必要がある。

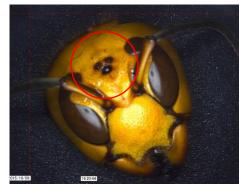
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$
 転写 球面入射 球面比射 球面反射

【図4】光線追跡に用いたシステム行列(αパターン) R_1 , R_2 : 曲率半径、n: 屈折率、d: レンズの厚さ。

(2) 以前、「ヒトの眼には副実像は映らないのか」という質問を受けたことがあり、ヒトの眼や

昆虫の眼に副実像が出現しないか調べた。ヒトの眼の水晶体は球 面ではないため出現しにくく、もし出現したとしても網膜でキャ ッチすることはできない。そのため、人の眼には映らないという 結論を導いている。また、昆虫には、光ファイバー眼としての性 質を持つ複眼(個眼の集合体)のほかに、単眼を持つ種類もみら れ、肉眼でも確認できるほど大きな単眼を持つオオスズメバチに ついて、副実像が出現することを確認している(2015)。

ここでは、オオスズメバチ・トノサマバッタ・アブラゼミの単 眼【図5・6】について、レンズの形状、網膜の位置を調べ、副 実像の出現の有無と、その認識について推測する。



【図5】オオスズメバチ 赤丸で示した部分が単眼

実験精度をあげるため、本校以外に熊本大学の施設もお借りして実験を行った。

測定方法を以下に記す。

※使用した生物材料(捕獲数等):

・オオスズメバチ 35匹 (スライス:12匹, 単眼剥離:5匹)

トノサマバッタ 42匹 (スライス:13匹, 単眼剥離: 7匹)

・アブラゼミ 15匹 (スライス:15匹)

〈実験方法1(本校にて実験)>

新鮮な組織を常時観察できるように、一 60℃まで冷やすことができるディープフリ ーザーで保存した。

- ① 単眼をピンセット等で剥がし、単眼のレ ンズ部分にマイクロスコープ(キーエン ス社製) 【図7】の照明を入射させて観 察する。
- ② ハチ、バッタ、セミの単眼を凍結ミクロ トーム (NipponOpticalWorks社製) 【図 8〕で10ミクロンごとにスライスし、 マイクロスコープで観察する。
- ③ マイヤーへマトキシリンで核を染色する。





【図6】トノサマバッタとアブラゼミ 赤丸部分が単眼







【図7】 マイクロスコープ

顕微鏡(左)。

【図8】凍結ミクロトーム 凍結した試料を5~40 ミク 10~200 倍の実体顕微鏡ロンの幅で切断可。 (右)、500~5000 倍の光学

<実験方法2(熊本大学の施設で実験)>

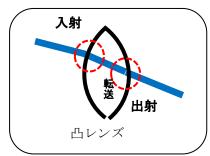
- ① 捕獲した昆虫の単眼を切り出す。
- ② サンプルをクライオモルド (凍結切片作製用包埋皿) に入れ、コンパウンドで包埋する。
- ③ 液体窒素で冷やした-160℃程度のイソペンタンで急速凍結させる。
- ④ クライオスタットで10ミクロンごとにスライスし、-20℃で3分間メタノール固定する。
- ⑤ スライドガラス上の切片を染色液(トルイジンブルー)に30秒間つけ、超純水で洗浄する。

3 結果

(1) 先に、教科書にも掲載されている「レンズの公式」を、システム行列による光線追跡の手法 で確認する(システム行列を組む際は、光の進み方〔図9〕と逆から組む必要がある.)。

出射 転送 入射
$$\begin{pmatrix}
C & D \\
A & B
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{1-n} & 0 \\
\frac{1-n}{R} & 1
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\frac{1}{n} & \frac{d}{n} \\
0 & 1
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\frac{1}{1-n} & 0 \\
\frac{1-n}{R} & 1
\end{pmatrix}$$

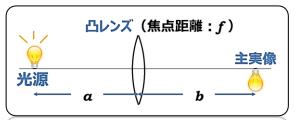
$$= \begin{pmatrix}
1 & \frac{d}{n} \\
\frac{2(1-n)}{R} + \frac{d(1-n)^2}{nR^2} & 1 + \frac{d(1-n)}{nR}
\end{pmatrix}$$



【図9】凸レンズにおける 主実像の光の進み方

これより、度数(光を屈折する力)を表す屈折力A は $A = \frac{2(1-n)}{R} + \frac{d(1-n)^2}{nR^2}$ となった。ガラスの屈折率 n=1.5、R=f (凸レンズ)とおいて近似(レンズの厚み d=0)すると、

$$\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$
と書ける。そこでレンズから距離



【図10】凸レンズにおける光源と 像の位置関係

光源は凸レンズによって a の位置から b の位置に写像(転写)される。

 \mathbf{a} の位置にある光源は、屈折力 \mathbf{A} のレンズを通して、レンズから距離 \mathbf{b} の位置に写像**〔図10〕**されるので、次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} C' & D' \\ A' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{f} & a + b - \frac{ab}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{a}{f} \end{pmatrix}$$

これにより、点状物体は収差0で一点に集まる(結像条件D'=0)とすると、

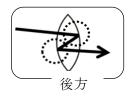
$$a + b - \frac{ab}{f} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad \left(A = -\frac{1}{f}\right)$$

となり、凸レンズがつくる主実像(本来の実像)の写像公式が求まる。

次に、すでに導出した副実像の写像公式も確認する。光の進み方【図 11】をもとにシステム行列を組んだ。前方、後方の副実像は、レンズ内部の反射がそれぞれ1回、2回起こることから、以下





のように列記できる(ここではレンズ前方の 【**図 11】レンズ前方・後方の副実像の光の進み方** 副実像のみを示す.)。

曲射 転送 球面反射 転送 入射

前方:
$$\binom{CD}{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

球面出射 転送 球面反射 転送 球面反射 転送 球面入射
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを計算すると、凸レンズ前方の副実像の屈折力 A は、図 12 より、

$$A = \frac{2-4n}{R} - \frac{2d(1-n)}{R^2} - \frac{2d(1-n)(1-2n)}{nR^2} - \frac{2d^2(1-n)^2}{nR^3}$$

となった。結像条件 D=0 及び屈折率 n=1.5、R=f とおいて、近似(レンズの厚み d=0)すると、

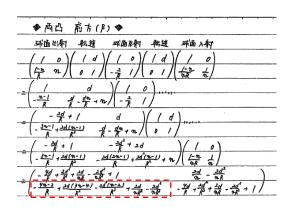
$$A \stackrel{}{=} \frac{2-4n}{R} \stackrel{}{=} -\frac{4}{f} \qquad \text{\sharp 0} \,,$$

凸レンズ前方の副実像の写像公式: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{f}$

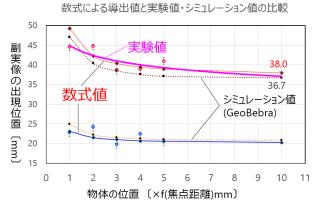
同様にして、後方は、

凸レンズ後方の副実像の写像公式: $rac{1}{a}+rac{1}{b}=rac{7}{f}$

と書ける。ここから得られた数式値と、実験の測定値をグラフ**〔図 13〕**にまとめると、数式値が 実験値の誤差以内であることから、導出した公式が成り立つことを確認している。



【図 12】計算結果(凸レンズ前方) 口枠部分が屈折力 A を表す。



【図13】前方・後方の副実像の出現位置の関係 (実験値・公式による数式値・シミュレーション値) シミュレーション値は厚肉モデルを数学ソフトで算出.

ここで、平凸レンズの定式化の前に、別のシステム行列を考えることにした。理由は、 α パターンでの計算にミスがあったとしても近似をとるため公式化には影響はないが、厚肉モデルでの正確性を期すためには、導出した定式にミスがないとう確証を得ることはとても重要である。また、導出した定式は手計算であり、何度も定式は一致してはいるものの不安が残るのも事実である。以上の点から、別の視点からも行列式を考案できれば、定式の正確性を確保でき、計算時間も短縮できると考えた。

球面出射 転送 球面反射 (1 0)
$$\left(\frac{1-n}{R_2} \ 1\right)$$
 $\left(\frac{1}{0} \ \frac{d}{n}\right)$ $\left(\frac{1}{-\frac{2n}{R_1}} \ 1\right)$ $\left(\frac{1-n}{R_1} \ 1\right)$

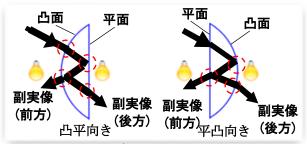
【図 14】システム行列の β パターンの完成

○、□枠部分の屈折率 n の関わり方が異なる.

システム行列の α パターンは、屈折率nの媒質中を転送・反射させて行列を組み、数式化させている。これに対し、屈折率1 の媒質中を転送・反射に合わせて行列を組み、最後にまとめて屈折率n を考慮する方法 (β パターン)を考えることにした。文献[5]を参考に、試行錯誤の上、ようやく別の視点からアプローチするシステム行列が完成した【図14】。 β パターンで導出した式も、これまでの α パターンで導出した定式とも一致し、利用できることが確認できた。

システム行列の正確性が確認できたことから、平凸レンズにおける副実像の写像公式化を行った。 先に、 α パターンで導出し、 β パターンで確認を行うことにした。

まず、平凸レンズは面の向きを定義する必要あるため、**図15**のように、レンズ前方(図中の左側)に光源を置き、凸平向きと平凸向きに分けて定式化を行った。



【図15】平凸レンズにおける副実像の前後の出現 位置と光の進み方

ここでは、凸平向きに置いた平凸レンズ における「凸平前方」のみ扱う。

$$\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2n} & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-n} & 0 \\ \frac{1-n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{n} + \frac{4d^2}{R^2} + \frac{3d}{nR} - \frac{4d^2}{nR^2} + 1 & \frac{3d}{n} - \frac{4d^2}{nR} \\ -\frac{3n-1}{R} + \frac{4d(n-1)}{R^2} & -\frac{4d}{R} + 1 \end{pmatrix}$$

 α 、 β パターンでの一致が確認できたので、d=0,n=1.5,R=f/2 を代入すると、

$$\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{7}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

これにより、凸平後方の写像公式は、 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{7}{f}$ と書けることがわかった。同様に計算して、 平凸レンズの写像公式をまとめた。

「凸平前方の副実像:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{f}$$
 凸平後方の副実像: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{7}{f}$

平凸後方の副実像:
$$rac{1}{a}+rac{1}{b}=rac{6}{f}$$
 平凸後方の副実像: $rac{1}{a}+rac{1}{b}=rac{7}{f}$

(2) 昆虫の種類によって、単眼の位置や個数が異なる。調べてみると、オオスズメバチは額に3つ、アブラゼミは正面に3つ、トノサマバッタは正面に1つ、触角の後ろに2つあることが分かった。次ぎに、オオスズメバチ、トノサマバッタ、アブラゼミの単眼の断面を観察したところ、ハチとセミは両凸レンズ、バッタは平凸レンズであることが分かり、サンプルを染色 [図16] すると、網膜細胞の位置を特定することができた。画像を解析した結果、網膜の位置が算出できた〔表1〕。捕獲した昆虫のレンズ形状は、トノサマバッタが平凸レンズで、オオスズメバチ・アブラゼミは曲率半径の異なる球面レンズあることがわかった。



【図16】ハチ(上)・バッタ(下)の単眼のようす 左側が観察される。右側の写真は染色後の画像で、 レンズ後方の網膜細胞が紫色に染色されている。

[表 1] 曲率半径の大きさと網膜の位置

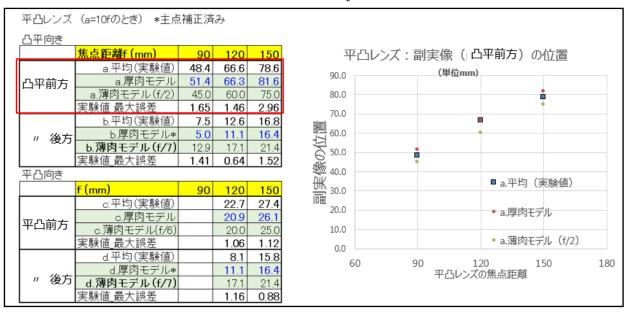
	前	後	ν	後 面 -				
	面	面	ン	網膜間				
	R_1	R_2	ズ	の距離				
			厚					
ハチ	263	192	169	100				
バッタ	190	-	120	120				
セミ	246	132	372	200				

単位:ミクロン

※各 10 匹以上計測したが、個体差があるため各 1 匹のデータのみ掲載。

4 考察

平凸レンズの「凸平前方」の公式に着目して、実験値・厚肉モデル・薄肉モデルで比較**【図 17】**をみてみる。焦点距離fが異なっても理論値と実験値がほぼ一致し、数式値が実験値の誤差以内であることから、導出した定式が成り立つことが確認できた。定式から、両凸レンズ・平凸レンズともに、後方の副実像の出現位置(近似)は、焦点距離fの 1/7 倍であることがわかった。



【図 17】 平凸レンズの副実像の出現位置 (理論値と実験値比較)

また、オオスズメバチ・アブラゼミのように、最も複雑となる、曲率半径の異なる球面レンズ(曲率半径をで変化した。この式において $R_1=R_2=R$ とすると両凸レンズの式に、 $R_1=R$ 、 $R_2=\infty$ とすると凸平向きのレンズの式に、 $R_1=\infty$ 、 $R_2=R$ とすると平凸向き

アブラゼミの単眼|出現位置の計算

顕微鏡による分析により・・・ 判明!

凸レンズ前面の曲率半径R₁:246ミクロン 凸レンズ後面の曲率半径R₂:132ミクロン



後方の副実像の 出現位置を求めるため、 導出した式に代入

> R1=246μm, R2=132μm, d=372μmを代入

後方の副実像の出現位置 n=1.5のとき ≒170.2(µm) n=1.4のとき ≒173.5(µm)

【図 18】アブラゼミの単眼における後方の副実像の位置

のレンズの式に、それぞれ一致した。即ち、この式は全ての副実像を網羅できること意味する。

そこで今回、アブラゼミの単眼の 曲率半径 R_1 =246 ミクロン、 R_2 =132 ミクロン、レンズの厚み d=372 ミクロンから副実像後方の出現位置の計算を行った [図 17] ところ、主実像と比べ、網膜に近い位置 170 ミクロン付近に結像する可能性があることがわかった。それ以外の昆虫においても、主実像よりも網膜に近い位置に副実像が出現する可能性が高いことがわかった [表 2]。

【表2】アブラゼミの単眼における後方の副実像の位置

単位:μm レンズの 前方の 後方の 主実像の 副実像後方の 糞の位置 出現位置出現位置 曲率半径R1 曲率半径R2 (レンズ後方 (a=∞,n=1.5) (a=∞,n=1.5) から) オオスズメバチ 両凸レンズ 138.9 263 192 304 100 トノサマバッタ 平凸レンズ 190 405 145.1 120 ∞ アブラゼミ 両凸レンズ 170.2 246 132 286 200

全ての昆虫において主実像よりも網膜に近い位置に副実像が出現

今回、写像公式が完成したため、公式に α =0を代入すれば、副実像の焦点、いわゆる"副焦点"が存在することもわかってきた。実際に、顕微鏡を使い、副実像に対応する虚像を確認することができた。顕微鏡を覗き込むときに映る大きなまつ毛(拡大された正立像)は、実は副実像が関わっていたことがわかった。また、副実像が結像する際、光がどのようにして集められているかを可視化することは、実像との違いをはっきりすることができるため重要である。そこで、副実像スコープを製作した。強い光源が光軸に近ければ副実像は認識しにくいが、光軸から大きく外れるほど認識しやすいことがわかり、後方の副実像を、カメラがどのように捉えられているのかがイメージしやすくなった。

レンズが複数枚重なった場合の副実像についても調べたところ、反射防止膜のついたコーティングレンズであっても、強い光源であれば副実像は出現するため、受像部側に近いレンズと、レンズの距離を f/7 以上は離す必要があることもわかってきた。

5 結論

副実像全ての写像公式及び、前面・後面で曲率半径が異なるレンズでも副実像の出現位置を特定できる定式が完成した。これにより、後方の副実像の出現位置は、焦点距離fの1/7倍であることから、レンズの形状や組み合わせ枚数が分かれば、副実像の出現位置、つまり、副実像に起因したゴーストの出現位置も特定できることがわかった。また、副実像に対応する焦点として"副焦点"も発見できた。応用例としては、副実像は球面でしか現れないため、昆虫の単眼のように小さなレンズの精度測定に期待できると考えられる。

謝辞

本研究を行うにあたり、宇土高校科学部顧問の梶尾滝宏先生の指導を受けました。また、昆虫の眼の専門的な知見や単眼の切り出し方などのアドバイスをくださった、熊本大学大学院生命科学研究部分子脳科学分野の岩本和也先生、文東美紀先生、国立大学法人総合研究大学院大学の木下充代先生に感謝し申し上げます。

参考文献

- [1]2013年度日本物理学会第9回Jr. セッション(日本物理學會誌68 2013.3月 (27J-8))
- [2]「ヘクト光学 I -基礎と幾何光学-」Eugene Hecht著尾崎義治・朝倉利光訳
- [3]「光学第1章幾何光学」黒田和男著http://qopt.iis.u-tokyo.ac.jp/optics/3lensU_A4.pdf
- [4]「第1 章幾何光学」八木隆志著http://www.sp.u-tokai.ac.jp/~yagi/OpticsandLaser
- [5]「幾何光学による光線の追跡」狩野覚著 http://cis.k.hosei.ac.jp/~kano/opt/opt_01.pdf